EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE N°1 : 25' 5 points

1) Soit (E_1) l'équation différentielle $3y' + 4y = 0$.
a) Résoudre cette équation différentielle.
b) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E_1) qui vérifie $f(0) = 8$.

2) Soit (E_2) l'équation différentielle $y' + 2y = 3$.
a) Résoudre cette équation différentielle.
b) Déterminer la solution particulière g de l'équation (E_1) qui vérifie $g(0) = 1$.

3) Soit (E_3) l'équation différentielle $y'' + 36y = 0$.
a) Résoudre cette équation différentielle.
b) Déterminer la solution particulière h de l'équation (E_3) telle que $h(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $h(\frac{\pi}{4}) = 1$.
c) Montrer que la solution particulière trouvée au 3)b. peut s'écrire $h(x) = a\cos(6x + b)$ où a et b sont des réels que l'on déterminera.

EXERCICE N°2 : 20' 4 points

1) a) Résoudre l'équation différentielle :(E) $4y' + 3y = 0$.
b) Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.

2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$ par : $g(x) = 8e^{-0,75x}$.
a) Etudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).
b) Soit A le domaine plan compris entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 4$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses $(x'x)$. On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

EXERCICE N°3 : 15' 3 points

Soit l'équation différentielle (**E**) : $y' = y(1 - y)$. On pose $z = \frac{1}{y}$ où $y \neq 0$

1) Montrer que z est solution de l'équation différentielle (E') : $z' = -z + 1$
2) Résoudre (E') puis (E).
3) Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°4 : 20' 4 points

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = e^{2x}$

1) Démontrer que la fonction $(x) = xe^{2x}$ est solution de (E_1)

2) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$

3) Montrer qu'une fonction f est solution de (E_1) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_2)

4) En déduire toutes les solutions de (E_1)

5) Déterminer la fonction solution de (E_1) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°5 : 40' 6 points

On considère l'équation différentielle **(E)** : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

1) a)Démontrer que la fonction $(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E)

b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y - y' = 0$

c)Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')

d) En déduire les solutions de (E)

2) a)Vérifier que la solution h de E tel que $h(1) = 0$ est définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = \frac{(1-x)e^x}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

c) Montrer que le point A(1,0) est un point d'inflexion de la courbe représentative de h.

d) Etudier les branches infinies de h puis tracer sa courbe représentative.

3) On considère H la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $H(x) = \int_1^{\ln x} h(x)\,dx$.

Montrer que H est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $H'(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln x}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.